Homéomorphisme exp : $\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et décomposition polaire

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 156 : Exponentielle de matrices. Applications.
— 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
— 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \exp & : & \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ & & S & \mapsto & e^S \end{array}$$

est un homéomorphisme

Preuve : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$,
Par théorème spectrale, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$.
D'où $\exp(S) = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\forall i \in [\![1, n]\!], e^{\lambda_i} > 0$.

Étape 1 : Montrons la surjectivité de exp

Soit $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $B = P\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)P^{-1}$ avec $\mu_i > 0$.
Donc $B = \exp(S)$ avec $S = P\mathrm{diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n))P^{-1}$ qui est symétrique, d'où la surjectivité.

Étape 2 : Montrons l'injectivité de exp

Soit $A, A' \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A) = \exp(A')$.
Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. On a $Q(\exp(A)) = A$.
A' commute avec $Q(\exp(A')) = Q(\exp(A)) = A$ donc comme A' et A sont diagonalisables, A et A' sont co-diagonalisables.
En notant $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ les valeurs propres de A', il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} & P\mathrm{diag}(e^{\lambda'_1}, \dots, e^{\lambda'_n})P^{-1} = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1} \\ \iff & \mathrm{diag}(e^{\lambda'_1}, \dots, e^{\lambda'_n}) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \\ \iff & \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = \lambda'_i \text{ par injectivité de } \exp_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

donc $A = A'$.

Étape 3 : Montrons la bicontinuité de $\exp$

L'application exp est continue, montrons la continuité de la réciproque.
Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B = \exp(A) \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons que (A_p) converge vers A.
Comme (B_p) converge, (B_p) est bornée pour $|||.|||_2$.
Donc par continuité de $A \mapsto A^{-1}$, on a $B_p^{-1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} B^{-1}$ car B est inversible donc est également borné pour $|||.|||_2$.
Or, pour $M \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |||M|||_2 &= \sqrt{\rho({}^tMM)} \\ &= \sqrt{\rho(M^2)} \\ &= \rho(M) \end{aligned}$$

Donc le spectre des B_p est majoré par une constante C et de même le spectre des B_p^{-1} sont majoré par une constante $\frac{1}{C'}$. Ainsi, toutes les valeurs propres de B_p sont contenues dans le compact $K = [C', C] \subset]0, +\infty[$.
Donc les valeurs propres des A_p sont incluses dans $[\ln C', \ln C]$. Donc (A_p) est bornés pour $|||.|||_2$.
Or, la suite (A_p) possède une unique valeur d'adhérence,
En effet, soit (A_{p_k}) une sous-suite de (A_p) qui converge vers A' alors $\exp(A_{p_k}) = B_{p_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$ on a $\exp(A') = B = \exp(A)$ d'où $A = A'$ par injectivité de exp sur $\mathrm{S}_n(R)$.

Ainsi, comme dans un espace vectoriel de dimension finie, une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence, la suite (A_p) converge vers A. □

Corollaire 1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} : & \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ & S & \mapsto & S^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

est un homéomorphisme

Preuve : On a pour $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (S^{\frac{1}{2}})^2 &= S \\ \exp^{-1}((S^{\frac{1}{2}})^2) &= \exp^{-1}(S) \\ S^{\frac{1}{2}} &= \exp(\frac{1}{2}\exp^{-1}(S)) \end{aligned}$$

Donc $S \mapsto S^{\frac{1}{2}}$ est un homéomorphisme par composition. □

Corollaire 2 (Décomposition polaire)**.** *Les applications suivantes :*

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & O_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ & & (O,S) & \mapsto & OS \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccc} \psi & : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & O_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & (M({}^tMM)^{-\frac{1}{2}}, ({}^tMM)^{\frac{1}{2}}) \end{array}$$

sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre.

Preuve : φ est bien définie et est continue.
Pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tMM \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et

$$M({}^tMM)^{-\frac{1}{2}}\,{}^t(M({}^tMM)^{-\frac{1}{2}}) = M({}^tMM)^{-\frac{1}{2}}({}^tMM)^{-\frac{1}{2}}\,{}^tM = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM = MM^{-1}\,{}^tM^{-1}\,{}^tM = I_n$$

Donc $M({}^tMM)^{-\frac{1}{2}} \in O_n(\mathbb{R})$.
De plus, pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M({}^tMM)^{-\frac{1}{2}}({}^tMM)^{\frac{1}{2}} = M$ donc $\varphi(\psi(M)) = M$
Pour $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $(({}^tOS)OS)^{\frac{1}{2}} = (S^tOOS)^{\frac{1}{2}} = S$ donc $\psi(\varphi(O, S)) = (O, S)$.
φ et ψ sont donc réciproques l'une de l'autre. $\square$

Références

[1] Jérome Germoni Philippe Caldero. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier*. Calvage Mounet, 2013.